2.11.2 Kvádr

Předpoklady: 021101

Př. 1: Jaké těleso získáme, když spojíme dvě krychle stěnami k sobě?

Získáme kvádr.

Př. 2: Jak poznáme kvádr. Čím se liší kvádr od krychle? V čem se shodují? Jaký je mezi nimi vztah.

Stěny kvádru jsou buď obdélníky nebo krychle.
Odlišnosti od krychle:

- hrany nemusí být shodné,
- stěny nemusí být shodné.

Shody s krychlí:

- stěny pravoúhelníky,
- hrany jsou kolmé na sousední stěny.

Krychle je speciální případ kvádru (má všechny jeho speciální vlastnosti a ještě něco navíc).

Pedagogická poznámka: I přes úspěšné řešení předchozího příkladu většina žáků prohlašuje, že stěnami kvádru musí být obdélníky. Teprve výslovný odkaz na první příklad je dovede k tomu, aby se opravili.

Př. 3: Napiš vzorce pro objem a povrch kvádru. Zkontroluj, zda mají očekávaný tvar.

Objem kvádru: $V = abc$ (třetí mocnina vzdálenosti - odpovídá předpokladům)
Povrch kvádru: Sečteme obsahy stěn (kvádr má tři páry shodných stěn):
$S = 2ab + 2bc + 2ac = 2(ab + bc + ac)$ (součet druhých mocnin vzdálenosti - odpovídá předpokladům).

Př. 4: Kvádr má rozměry $a = 5\text{ cm}, b = 4\text{ cm}, c = 3\text{cm}$. Urči jeho objem i povrch.

$$V = abc = 5 \cdot 4 \cdot 3\text{ cm}^3 = 60\text{ cm}^3$$

$$S = 2(ab + bc + ac) = 2(5 \cdot 4 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 3)\text{ cm}^2 = 94\text{cm}^2$$

Kvádr o zadaných rozměrech má objem 60 cm^3 a povrch 94 cm^2.

Př. 5: Pepa se rozmáchl a nechal si na zahradě postavit bazén 6 x 4 m a hloubce 1,8 m. Už se těší, jak mu jeho velký bazén budou všichni závidět. Předpokládá, že za vodu, kterou bazén napustí, neutratí víc než 1000 Kč. Zaplní vodou při ceně vodného a stočného 65 Kč/ m^3 celý bazén? Pokud ne, jak vysoko bude voda po napuštění vody sahat? Kolik by napuštění jeho bazénu stálo?

Rovnou spočítáme, jak vysoko bude voda v bazénu sahat (pokud vyjde více než 1,8 m, bude bazén napuštěný celý, pokud ne, alespoň získáme řešení druhé části příkladu.

Nejdříve zjistíme kolik m^3 vody může za dané ceny do bazénu napustit.
$1\,\mathrm{m}^3$ stojí 65 Kč

Počet m^3 nakoupených za 1000 Kč: $1000 : 65 = 15,3\,\mathrm{m}^3$.

Bazén (i jeho vnitřek a tedy napuštěná voda) má tvar kvádru, známe dva jeho rozměry (6 m x 4 m) a objem napouštěné vody $\Rightarrow$ vyjádříme ze vzorce pro objem třetí rozměr (napuštěnou hloubku) a určíme jeho hodnotu.

$V = abc \qquad / : ab$

$$c = \frac{V}{ab} = \frac{15,3}{4 \cdot 6}\,\mathrm{m} = 0,64\,\mathrm{m}$$

Naplnění celého bazénu:
Objem: $V = abc = 6 \cdot 4 \cdot 1,8\,\mathrm{m}^3 = 43,2\,\mathrm{m}^3$
Cena: $43,2 \cdot 65 = 2808$ Kč.

Bazén plný nebude, voda v něm vystoupá pouze do výšky 64 cm. Napuštění celého bazénu by stálo 2808 Kč.

Př. 6: Odhadni, kolik stojí napuštění typického plaveckého bazénu o rozměrech 25 x 15 x 2 m. Svůj odhad ověř výpočtem.

Odhad: čtyřikrát větší bazén $\Rightarrow$ čtyřikrát větší cena za napuštění $\Rightarrow$ napuštění bude stát cca 10 000 Kč.

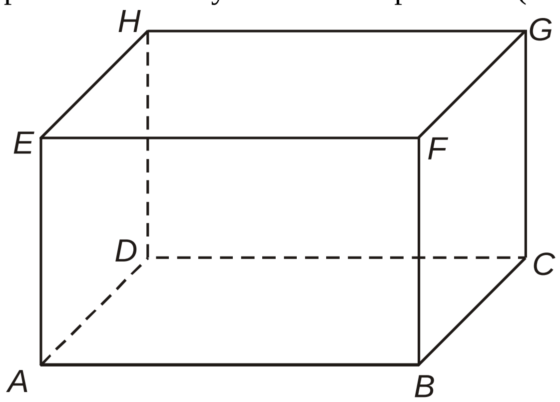
Objem: $V = abc = 25 \cdot 15 \cdot 2\,\mathrm{m}^3 = 750\,\mathrm{m}^3$
Cena: $750 \cdot 65 = 48750$ Kč.

Původní úvaha byla chybná, rozměry bazénu jsou přibližně čtyřikrát větší, ale objem roste s třetí mocninou $\Rightarrow$ zvětší daleko více než čtyřikrát ($4^3 = 64$ krát). V našem případě se zvětšil pouze 17 krát, protože hloubka se téměř nezměnila (objem se zvětšil pouze s druhou mocninou $4^2 = 16$, protože se čtyřikrát zvětšila pouze rozloha bazénu).

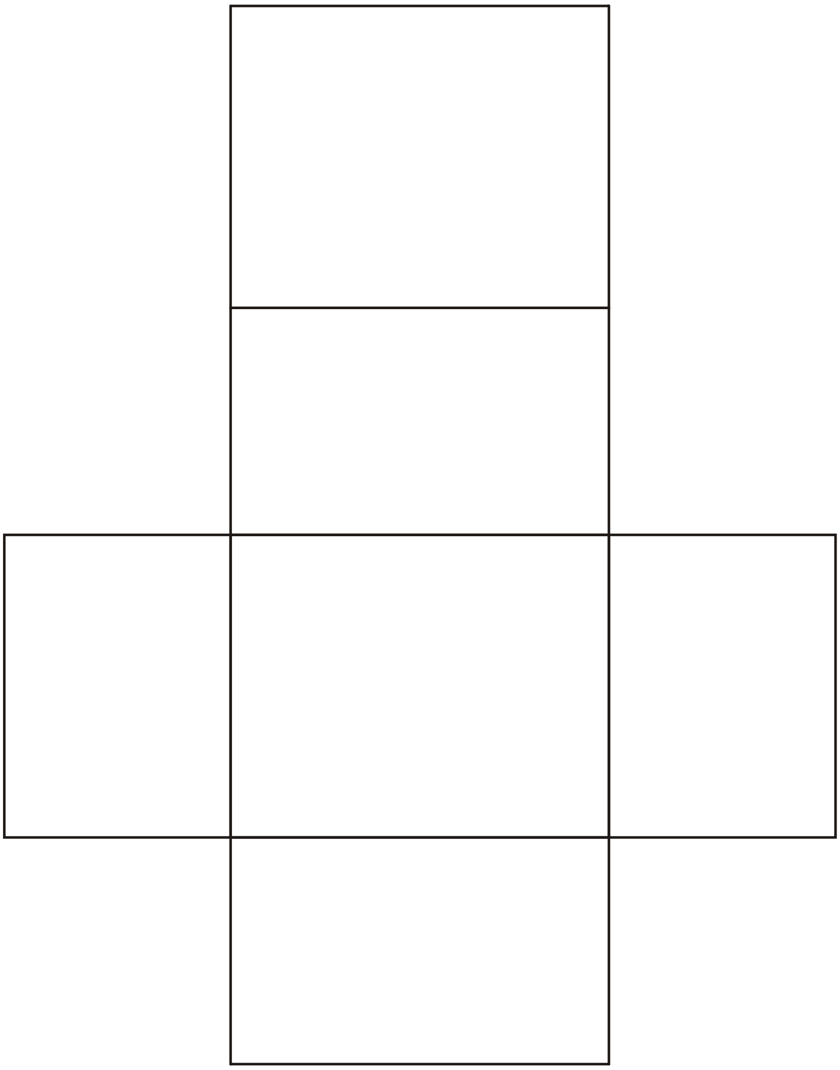
Pedagogická poznámka: Typické žákovské odhady jsou podstatně nižší než skutečnost. Žáci nevnímají, že objem roste daleko rychleji než rozměry.

Př. 7: Narýsuj v pravém nadhledu kvádr *ABCDEFGH* o délkách hran $AB = a = 5\text{cm}$, $BC = b = 4\text{cm}$ a $AE = c = 3\text{cm}$. Kvádr leží na podstavě *ABCD*, stěnou *ABFE* čelem k Tobě.

Postupujeme podobně jako při rýsování krychle. Stěnu *ABFE* rýsujeme nezkresleně, předozadní hrany zkrácené na polovinu (z 4 cm na 2 cm) a pod úhlem $45°$.



Př. 8: Narýsuj síť kvádru z předchozího příkladu.



Pedagogická poznámka: Možností, jak narýsovat předchozí příklad je mnoho. Odpovídající síť můžeme narýsovat ke každé síti krychle.

Př. 9: Najdi doma libovolný kvádr (například krabici od bot) a změř co nejpřesněji všechny jeho tělesové úhlopříčky. Vysvětli zajímavou vlastnost, kterou naměříš.

Délku úhlopříček můžeme například změřit pomocí špejle (označíme si délku na špejli a pak ji změříme měřítkem).
Všechny úhlopříčky mají stejnou délku. Protože tělesová úhlopříčka kvádru je přeponou pravoúhlého trojúhelníku jehož odvěsnami jsou stěnová úhlopříčka a zbývající hrana. V délce tělesové úhlopříčky jsou tak postupně započítány všechny tři rozměry kvádru. Ke stejnému výsledku dospějeme u všech tělesových úhlopříček bez ohledu na to jak si zvolíme výchozí stěnovou úhlopříčku.

Shrnutí: Krychle je speciálním případem kvádru, který má podobné vlastnosti, ale nemusí mít stejně dlouhé hrany.